Выражения.

1) Выражение, составленное из чисел, из знаков действий и скобок (по необходимости), называется числовым выражением.

2) Число, которое получается в результате выполнения действий в числовом выражении, называют значением выражения.

3) Если в выражении встречается деление на нуль, то это выражение не имеет числового значения, так как на нуль делить нельзя. О таких выражениях говорят, что они не имеют смысла.

4) Выражение, содержащее буквы, называется буквенным выражением или выражением с переменными.

5) Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-либо её значение, то получится числовое выражение. Его значение называют значением выражения с переменными при выбранных значениях переменных.

6) Выражения с переменными используются для записи формул. *Примеры.*
1) формула пути $\mathbf{S = v \cdot t}$;
2) формула чётного числа $\mathbf{m = 2n}$, где $\mathbf{n}$ – целое число;
3) формула нечётного числа $\mathbf{m = 2n+1}$, где $\mathbf{n}$ – целое число;
4) формула числа, кратного пяти $\mathbf{m = 5n}$, где $\mathbf{n}$ – целое число.

7) Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ и $<$, называют строгими неравенствами, а неравенства, составленные с помощью знаков $\geq$ и $\leq$, называют нестрогими.

Свойства сложения.

8) $\mathbf{a + b = b + a}$ (переместительное: от перестановки мест слагаемых сумма не меняется).

9) $\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$ (сочетательное: чтобы к сумме двух слагаемых прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего).

10) В любой сумме можно как угодно переставлять слагаемые и произвольным образом объединять их в группы.

Свойства умножения.

11) $\mathbf{ab = ba}$ (переместительное: от перестановки мест множителей произведение не меняется).

12) $\mathbf{(ab)c = a(bc)}$ (сочетательное: чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего).

13) (a+b)c = ac + bc (распределительное свойство умножения относительно сложения: чтобы сумму двух чисел умножить на третье число, можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить).

14) (a - b)c = ac - bc (распределительное свойство умножения относительно вычитания: чтобы разность двух чисел умножить на третье число, можно по отдельности умножить на это число уменьшаемое и вычитаемое, а затем из первого результата вычесть второй).

Преобразование выражений.

15) В любом произведении можно как угодно переставлять множители и произвольным образом объединять их в группы.

16) Два выражения, значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными.

17) Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством. Тождествами считают и верные числовые равенства.

Примеры тождеств. **1)** равенства, выражающие основные свойства действий над числами:

$a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$; $ab = ba$; $(ab)c = a(bc)$; $(a+b)c = ac + bc$; $(a - b)c = ac - bc$.

2) $a + 0 = a$; $a + (-a) = 0$; $a + (-b) = a - b$; $a \cdot 1 = a$; $a \cdot (-b) = -ab$; $(-a)(-b) = ab$.

18) Замену одного выражения другим, тождественно равным ему выражением, называют тождественным преобразованием или просто преобразованием выражения.

19) Тождественные преобразования выражений с переменными выполняются на основе свойств действий над числами, а также могут включать в себя приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок.

20) Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

21) Если перед скобками стоит знак «плюс» или не стоит никакого знака, то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки.

22) Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки, на противоположный.

Уравнение.

23) Уравнение – это равенство с переменной.

24) Решить уравнение – это значит найти все его корни.

25) Корнем уравнения называют то значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

26) Уравнение может иметь один, два или более корней; может не иметь корней, а может иметь бесчисленное множество корней.

27) Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

28) Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

29) Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b - некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной.

30) Линейное уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет один корень, при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней, при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней (любое число является его корнем).

31) При решении задачи на составление уравнения нужно: 1) обозначить искомую неизвестную величину через x; 2) выразить остальные неизвестные в задаче величины через x; 3) составить уравнение на основании того условия задачи, которое не было до сих пор задействовано; 4) решить уравнение; 5) истолковать полученный результат в соответствии с условием задачи.

Статистические характеристики.

32) Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

33) Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

34) Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.

35) Медианой упорядоченного ряда чисел с нечётным числом членов называется число, записанное посередине.

36) Медианой упорядоченного ряда чисел с чётным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

37) Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Функция.

38) Зависимость, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной, называется функциональной зависимостью или функцией. Записывают: **y = f(x).** Независимую переменную **x** называют аргументом. Зависимую переменную **y** называют функцией.

39) Множество значений, которые принимает независимая переменная (аргумент), называют *областью определения функции* y=f(x) и обозначают **D(f)** или **D(y).**

40) Множество всех значений функции y=f(x) называют *областью значений функции* и обозначают **E(f)** или **E(y).**

41) Функцию можно задать графическим, словесным, табличным или аналитическим способом. Аналитический способ задания функции означает, что зависимость между переменными **x** и **y** задается посредством формулы (выражения).

42) Графиком функции называется множество точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

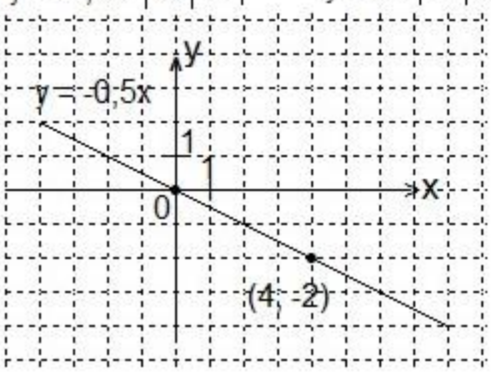
Прямая пропорциональность.

43) Прямой пропорциональностью называется функция, заданная формулой вида **y = kx**, где x – независимая переменная, k – коэффициент пропорциональности.

43а) Графиком прямой пропорциональности является прямая линия, проходящая через начало координат. При k > 0 график прямой пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при k < 0 – во второй и четвёртой. *Пример. Построить графики функций: 1) y = -0,5x; 2) y = 3x.*

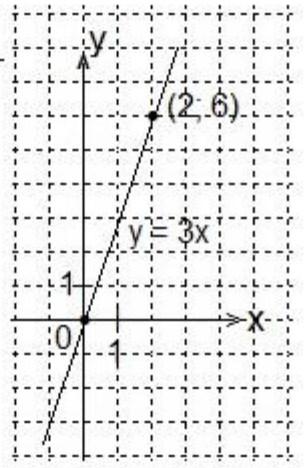
1)

x	0	4
y = -0,5x	0	-2



2)

x	0	2
y = 3x	0	6



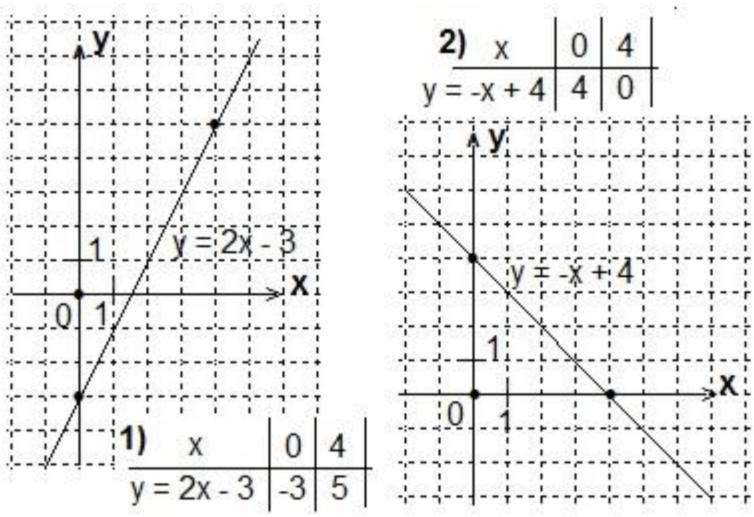
Линейная функция.

44) Функция, заданная формулой вида **y = kx + b** (где x – независимая переменная, k и b – любые числа), называется линейной функцией.

44а) Графиком линейной функции является прямая линия.

Коэффициент k называется угловым коэффициентом прямой. При $k > 0$ прямая образует с положительным направлением оси Ox острый угол, а при $k < 0$ – тупой угол.

Пример. Построить графики функций: 1) y = 2x - 3; 2) y = -x + 4.



45) Если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками линейных функций, различны, то прямые пересекаются.

46) Если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками линейных функций одинаковы, то прямые параллельны.

47*) Обратная функция.

Правило нахождения функции, обратной данной: 1) из данного равенства выражают **x** через **y**; 2) в полученном равенстве вместо **x** пишут **y**, а вместо **y** пишут **x**. Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой y = x (биссектрисы I и III координатных углов).

Степень и её свойства.

48) Произведение n сомножителей, каждый из которых равен **a**, называют n-й степенью числа **a** и обозначают через $\mathbf{a}^n$.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\ раз}$ ($\mathbf{a}^n$ – степень; **a** – основание степени; n – показатель степени).

49) Возвести число **а** в степень n – это значит выполнить произведение n сомножителей, каждый из которых равен **а.** *Примеры*: 1) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ (число 3 возведено во вторую степень); 2) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (число 5 возведено в третью степень).

50) Если показатель степени равен 1 (n=1), то $a^1=a$. Вторую степень числа **а** (a^2) называют квадратом, а третью степень (a^3) – кубом этого числа. 3^2 читают: «три в квадрате»; 5^3 читают: «пять в кубе».

51) Степени некоторых простых чисел. *Степень числа а, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице.* $\boxed{a^0 = 1}$

$2^0=1$ $2^1=2$ $2^2=4$ $2^3=8$ $2^4=16$ $2^5=32$ $2^6=64$ $2^7=128$	$2^8=256$ $2^9=512$ $2^{10}=1024$ $2^{11}=2048$ $2^{12}=4096$ $2^{13}=8192$ $2^{14}=16384$	$3^0=1$ $3^1=3$ $3^2=9$ $3^3=27$ $3^4=81$ $3^5=243$ $3^6=729$ $3^7=2187$	$5^0=1$ $5^1=5$ $5^2=25$ $5^3=125$ $5^4=625$ $5^5=3125$ $5^6=15625$	$7^0=1$ $7^1=7$ $7^2=49$ $7^3=343$ $7^4=2401$ $7^5=16807$	$11^0=1$ $11^1=11$ $11^2=121$ $11^3=1331$ $11^4=14641$

52) Любая степень положительного числа – положительное число.

53) Степень отрицательного числа с **чётным** показателем – положительное число. *Пример*: $(-2)^4 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.

54) Степень отрицательного числа с **нечётным** показателем – отрицательное число. *Пример*: $(-2)^3 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

55) При нахождении значения числового выражения со степенями (если нет скобок) сначала выполняют возведение в степень.

56) Каждое число, большее 10, можно записать в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и **n** – натуральное число. Такая запись называется стандартным видом числа, а **n** – порядком этого числа. *Пример*: $12345 = 1{,}2345 \cdot 10^4$.

57) Основное свойство степени. При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. *Пример*. $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$.

58) $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$ *Пример*. $c^3 \cdot c^2 \cdot c = c^{3+2+1} = c^6$.

59) При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя. $a^m : a^n = a^{m-n}$. *Пример*. $c^6 : c^2 = c^{6-2} = c^4$.

60) При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. *Пример*. $(4xy)^3 = 64x^3y^3$.

61) $(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$. *Пример*. $(7ab)^2 = 49a^2b^2$.

62) При возведении в степень дроби возводят в эту степень и числитель и знаменатель дроби. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$. *Пример*. $(\frac{2}{5})^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$.

63) $(\frac{ab}{cd})^n = \frac{a^n \cdot b^n}{c^n \cdot d^n}$. *Пример*. $(\frac{3x}{5c})^2 = \frac{3^2 \cdot x^2}{5^2 \cdot c^2} = \frac{9x^2}{25c^2}$.

64) При возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели перемножают. $(a^m)^n = a^{mn}$. *Пример*. $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$.

65*) (-n)-ой («минус энной», где n – натуральное число) степенью числа **a**, не равного нулю, считается число, обратное n-ой степени основания **a**.
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. *Пример*. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

66*) $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$. *Пример*. $(\frac{3}{2})^{-2} = (\frac{2}{3})^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

67*) Для степени с целым показателем справедливы все свойства степени с натуральным показателем.

68*) Стандартный вид любого числа (как очень большого, так и очень маленького) имеет вид: $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и **n** – целое число. Показатель степени **n** называют порядком числа.

Примеры. 1) Поверхность Земли составляет ≈ 510 000 000 км^2 или $5,1 \cdot 10^8$ км^2.
2) Масса атома водорода равна 0,000 000 000 000 000 000 000 00172 г или в стандартном виде $1,72 \cdot 10^{-24}$ г.

Одночлены.

69) Одночлен - это выражение, представленное в виде произведения чисел, переменных и их степеней. *Примеры*: 3m; cccc; $0,9a^2bc^5$; y; 11.

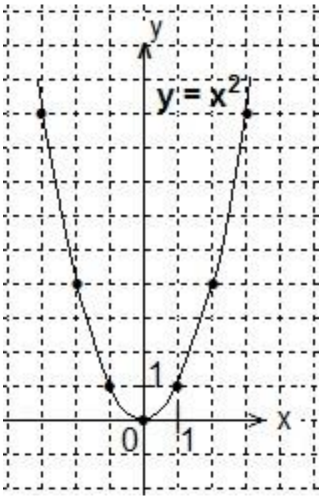
70) Любой одночлен можно записать в **стандартном виде**, т. е. в таком виде, где на первом месте стоит числовой множитель, а за ним - переменные с их степенями. *Примеры*: 4abc; $-5m^2n$; $0,01a^6$. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом одночлена**. В приведенных примерах **4**; **-5** и **0,01** – коэффициенты одночленов.

71) Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в состав одночлена. *Пример*: степень одночлена $0,9a^2bc^5$ равна восьми (2+1+5=8).

72) При умножении одночленов применяют правило умножения степеней с одинаковыми основаниями. Полученный в результате одночлен записывают в стандартном виде. *Пример.* Выполнить умножение одночленов:

$-4x^3yz^2$ и $0,5xy^5z^3$. *Решение*. $-4x^3yz^2 \cdot 0,5xy^5z^3 = -4 \cdot 0,5x^{3+1}y^{1+5}z^{2+3} = -2x^4y^6z^5$.

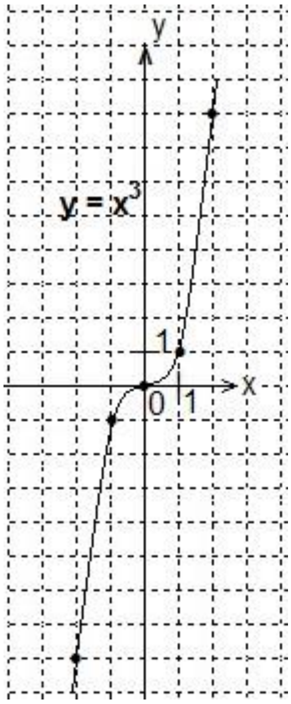
73) При возведении одночлена в степень применяют правило возведения степени в степень. Получаемый в результате этих действий одночлен представляют в стандартном виде. *Пример.* Возвести одночлен $-3a^2c^3x^5$ в четвертую степень. *Решение.* $(-3a^2c^3x^5)^4 = (-3)^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (c^3)^4 \cdot (x^5)^4 = 81a^8c^{12}x^{20}$.



74) Функция $y = x^2$ и её график.

График функции $\mathbf{y = x^2}$ называют параболой. Вершина параболы находится в начале координат.

При любых значениях переменной $\mathbf{x \neq 0}$ значения **y** всегда положительны, так как $(-x)^2 = x^2$. Ветви параболы неограниченно продолжаются вверх справа и слева от оси y.



75) Функция $y = x^3$ и её график.

График функции $y = x^3$ называется кубической параболой, проходит через начало координат и расположен в первой и третьей координатных четвертях, так как при значениях $\mathbf{x > 0}$ значения $\mathbf{y > 0}$, а при значениях $\mathbf{x < 0}$ значения $\mathbf{y < 0}$.
Имеем $(-x)^3 = -x^3$.

Многочлены.

76) Сумма одночленов называется многочленом.
Одночлены, из которых составлен многочлен, называются членами многочлена.
Пример. Членами многочлена $x^2 - 4x + 5$ являются x^2, $-4x$ и 5.

77) Двучлен – многочлен, состоящий из двух членов. Трехчлен – многочлен, состоящий из трех членов.

78) Подобными членами многочлена являются члены, имеющие одинаковую буквенную часть, *например*, $-7a^2x^3y$ и $2a^2x^3y$ являются подобными, так как имеют одинаковую буквенную часть a^2x^3y, т.е. отличаются только коэффициентами.

79) Привести подобные слагаемые – это значит сложить коэффициенты этих слагаемых и приписать общую буквенную часть. *Пример*. Выполнить приведение подобных слагаемых многочлена: $5ax^3 - 4a^2x + a^2x + 7ax^3 – 8$. *Решение.* У нас две группы подобных слагаемых: $5ax^3$ и $7ax^3$, а также $-4a^2x$ и a^2x. Получаем:

$5ax^3 - 4a^2x + a^2x + 7ax^3 – 8 = (5ax^3 + 7ax^3) + (- 4a^2x + a^2x) - 8 = 12ax^3 - 3a^2x - 8$.

80) Стандартным называют многочлен, все члены которого записаны в стандартном виде и среди них нет подобных. *Пример*. Многочлен $12ax^3 - 3a^2x - 8$ является многочленом стандартного вида.

81) Степенью многочлена называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. *Пример*. Многочлен $12ax^3 - 3a^2x - 8$ является многочленом четвертой степени, так как в нем наибольшую степень имеет одночлен $12ax^3$, действительно, 1+3=4 (складываем показатели степеней переменных).

82) При сложении и вычитании многочленов используются правила раскрытия и заключения многочлена в скобки:

82а) если перед скобками стоит знак «плюс» или не стоит никакого знака, то при раскрытии скобок все члены, стоящие в скобках переписываются со своими знаками;

82б) если перед скобками ставится знак «плюс», то члены, которые заключают в скобки, записывают в скобках со своими знаками;

82в) если перед скобками стоит знак «минус», то при раскрытии скобок все члены, стоящие в скобках переписываются с противоположными знаками;

82г) если перед скобками ставится знак «минус», то члены, которые заключают в скобки, записывают в скобках с противоположными знаками;

83) При умножении одночлена на многочлен данный одночлен поочередно умножают на каждый член многочлена. В результате получают многочлен. *Пример.* Умножить одночлен $3ax^2$ на трехчлен $a^2 + ax - 3x$. *Решение.*

$\mathbf{3ax^2} \cdot (a^2 + ax - 3x) = \mathbf{3ax^2} \cdot a^2 + \mathbf{3ax^2} \cdot ax + \mathbf{3ax^2} \cdot (-3x) = 3a^3x + 3a^2x^2 - 9ax^3$.

84) При умножении многочлена на многочлен каждый член первого многочлена умножают на каждый член второго многочлена. В полученном многочлене выполняют (при необходимости) приведение подобных членов. *Пример.* Выполнить умножение: $(2x + 3)(x – 4)$.

Решение. $(2x + 3)(x - 4) = 2x\cdot x+2x\cdot(-4)+3\cdot x+3\cdot(-4) = 2x^2 \underline{- 8x} \underline{+ 3x} - 12 = 2x^2 - 5x - 12$.

85*) Деление одночлена и многочлена на одночлен.

85а*) Деление одночлена на одночлен выполняют по свойствам умножения и деления. *Пример.* Выполнить деление: 1) $72x^3y^2 : 24xy$. 2) $12abc^2 : (-6bc)$. *Решение.* 1) $72x^3y^2 : 24xy= 3x^2y$. 2) $12abc^2 : (-6bc) = -2ac$.

85б*) При делении многочлена на одночлен каждый член многочлена делят на этот одночлен. *Пример*. Выполнить деление: 1) $(4a + 8a^2) : (-4a)$. 2) $(-2c^2d^5-5c^3d^2) : 5cd^2$. *Решение.* 1) $(4a + 8a^2) : (-4a) = 4a : (-4a) + 8a^2 : (-4a) = -1-2a$.

2) $(-2c^2d^5-5c^3d^2) : 5cd^2 = -2c^2d^5 : 5cd^2 -5c^3d^2 : 5cd^2 = - 0{,}4cd^3 – c^2$.

86) Представление многочлена в виде произведения одночлена и многочлена или в виде произведения двух или нескольких многочленов называют разложением многочлена на множители.

87) Вынесение общего множителя за скобки – простейший способ разложения многочлена на множители.

Примеры. 1) Разложить на множители: $15a^3 + 20a^2c - 15ac^2$.

Решение. Каждый член данного многочлена содержит общий множитель 5a. Вынесем 5a за скобки, а в скобках запишем результаты от деления каждого члена многочлена на 5a. Получаем: $5a(3a^2 + 4ac - 3c^2)$.

2) Вынести за скобки общий множитель: $(2x-8)^2$.

Решение. $(2x-8)^2=(2\cdot(x-4))^2=2^2\cdot(x-4)^2=4(x-4)^2$.

88) Способ группировки. Если многочлен можно разложить на множители, но все его члены не имеют общего множителя, то данный многочлен разбивают на группы, содержащие одинаковое количество членов, причем каждая группа имеет свой общий множитель, который и выносят за скобки. В полученном выражении будет ясно виден общий множитель: двучлен или трехчлен, который выносят за скобки. Результатом будет произведение многочленов.

Примеры. Разложить на множители многочлены:

1) $ax+ay+bx+by$. 2) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$. 3) x^2+5x+6. 4) x^2-x-12. 5) $(x-9)(x+3)$.

Решение.

1) $ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$.

2) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b=(ax^2+ax-a)-(bx^2+bx-b)=a(x^2+x-1)-b(x^2+x-1)=(x^2+x-1)(a-b)$.

3) $x^2+5x+6= x^2+2x+3x+6=(x^2+2x)+(3x+6)=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)$.

4) $x^2-x-12=x^2+3x-4x-12=(x^2+3x)-(4x+12)=x(x+3)-4(x+3)=(x+3)(x-4)$.

5) $(x-9)(x+3)-(x+3)^2=(x+3)(x-9-x-3)=(x+3)\cdot(-12)=-12(x+3)$.

89*) Деление многочлена на многочлен.

Чтобы разделить многочлен на многочлен нужно:

1) расположить делимое и делитель по убывающим степеням одной и той же переменной; 2) разделить высший член делимого на высший член делителя – получится первый член частного; 3) найденный член частного умножить на делитель и произведение вычесть из делимого; 4) разделить высший член найденного первого остатка на высший член частного; 5) найденный второй член

частного умножить на делитель и произведение вычесть из первого остатка; 6) так же поступать со вторым остатком и т.д. Если получается остаток, высший член которого не делится нацело на высший член делителя, то деление без остатка невозможно. *Примеры.* Выполнить деление:

1) $(x^2 – 4x + 3)$ **:** $(x – 1)$. 2) $(3x^2 + 22x + 7)$ **:** $(x + 7)$. 3) $(a^2 – 2ab + b^2)$ **:** $(a – b)$.

Решение.

1) $$\begin{array}{r|l} -\,x^2-4x+3 & x-1 \\ \underline{x^2-x} & \overline{x-3} \\ -\,-3x+3 & \\ \underline{-3x+3} & \\ 0 & \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r|l} -\,3x^2+22x+7 & x+7 \\ \underline{3x^2+21x} & \overline{3x+1} \\ -\,x+7 & \\ \underline{x+7} & \\ 0 & \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r|l} -\,a^2-2ab+b^2 & a-b \\ \underline{a^2-ab} & \overline{a-b} \\ -\,-ab+b^2 & \\ \underline{-ab+b^2} & \\ 0 & \end{array}$$

Выполнить деление с остатком:

4) $(4x^2 + 5x – 7)$ **:** $(x – 1)$. 5) $(3a^2 – 4ab – b^2)$ **:** $(a – b)$.

Решение.

4) $$\begin{array}{r|l} -\,4x^2+5x-7 & x-1 \\ \underline{4x^2-4x} & \overline{4x+9} \\ -\,9x-7 & \\ \underline{9x-9} & \\ 2\ \text{(остаток)} & \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r|l} -\,3a^2-4ab-b^2 & a-b \\ \underline{3a^2-3ab} & \overline{3a-b} \\ -\,-ab-b^2 & \\ \underline{-ab+b^2} & \\ -2b^2\ \text{(остаток)} & \end{array}$$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ.

90) <u>Квадрат суммы.</u> $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. *Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.*

Пример 1. Записать в виде многочлена: $(2m + n)^2$.

Решение. $(2m + n)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot n + n^2 = 4m^2 + 4mn + n^2$.

Пример 2. Представить трехчлен в виде квадрата двучлена: $9x^2 + 12x + 4$.

Решение. $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = (3x + 2)^2$.

91) <u>Квадрат разности.</u> $(a - b)^2 = a^2- 2ab+b^2$. *Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.*

Пример 1. Записать в виде многочлена: $(3m - 4n)^2$.

Решение. $(3m - 4n)^2 = (3m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 4n + (4n)^2 = 9m^2 - 24mn + 16n^2$.

Пример 2. Представить трехчлен в виде квадрата двучлена: $25x^2 - 10xy + y^2$.

Решение. $25x^2 - 10xy + y^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot y + y^2 = (5x - y)^2$.

92*) Квадрат трёхчлена. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Примеры. Записать в виде многочлена: 1) $(x + y + 3)^2$. 2) $(2x - 3y - 1)^2$.

Решение.

1) $(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x \cdot 3 + 2y \cdot 3 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y$.

2) $(2x - 3y - 1)^2 = (2x)^2 + (-3y)^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3y) + 2 \cdot 2x \cdot (-1) + 2 \cdot (-3y) \cdot (-1) =$

$= 4x^2 + 9y^2 + 1 - 12xy - 4x + 6y$.

93) Куб суммы. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. *Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.*

Пример. Представить в виде многочлена: $(5m + 2n)^3$.

Решение. $(5m + 2n)^3 = (5m)^3 + 3 \cdot (5m)^2 \cdot 2n + 3 \cdot 5m \cdot (2n)^2 + (2n)^3 =$

$125m^3 + 3 \cdot 25m^2 \cdot 2n + 3 \cdot 5m \cdot 4n^2 + 8n^3 = 125m^3 + 150m^2n + 60mn^2 + 8n^3$.

94) Куб разности. $(a - b)^3 = a^3- 3a^2b+3ab^2- b^3$. *Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения.*

Пример. Представить в виде многочлена: $(2x - 5y)^3$.

Решение. $(2x - 5y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5y + 3 \cdot 2x \cdot (5y)^2 - (5y)^3 =$

$8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot 5y + 3 \cdot 2x \cdot 25y^2 - 125y^3 = 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$.

95) Произведение разности двух выражений на их сумму. $(a - b)(a+b) = a^2- b^2$ *Произведение разности двух выражений на их сумму равно разности квадратов этих выражений.*

Пример. Представить в виде многочлена: $(5a - 4b)(5a + 4b)$.

Решение. $(5a - 4b)(5a + 4b) = (5a)^2 - (4b)^2 = 25a^2 - 16b^2$.

96) <u>Разность квадратов.</u> $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ *Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений на их сумму. Примеры.* Разложить на множители:

1) $(x + 4)^2 - 25$. 2) $81 - (2x - 3)^2$. 3) $(3x - 1)^2 - (2x + 5)^2$. *Решение.*

1) $(x + 4)^2 - 25 = (x + 4)^2 - 5^2 = (x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = (x - 1)(x + 9)$.

2) $81 - (2x - 3)^2 = 9^2 - (2x - 3)^2 = (9 - 2x + 3)(9 + 2x - 3) = (12 - 2x)(2x + 6) =$

$= 2 \cdot (6 - x) \cdot 2 \cdot (x + 3) = 4(6 - x)(x + 3) = -4(x - 6)(x + 3)$.

3) $(3x - 1)^2 - (2x + 5)^2 = (3x - 1 - 2x - 5)(3x - 1 + 2x + 5) = (x - 6)(5x + 4)$.

Пример 4. Вычислить: $\frac{69^2-51^2}{53^2-43^2}$.

Решение. $\frac{69^2-51^2}{53^2-43^2} = \frac{(69-51)(69+51)}{(53-43)(53+43)} = \frac{18 \cdot 120}{10 \cdot 96} = \frac{9 \cdot 12}{1 \cdot 48} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$.

Пример 5. Решить уравнение: $x^3 - 9x = 0$.

Решение. $x^3 – 9x = 0$. Вынесем x за скобки: $x(x^2 - 9) = 0$. Применим формулу разности квадратов двух чисел: $x(x - 3)(x + 3) = 0$. Отсюда следует, что или $x = 0$ или $x - 3 = 0$ или $x + 3 = 0$. Корни уравнения: 0; 3 и -3. Ответ: -3; 0; 3.

97) <u>Сумма кубов.</u> $a^3+b^3 = (a+b)(a^2 - ab+b^2)$. *Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.*

Пример. Разложить на множители: $64x^3 + 27y^3$.

Решение. $64x^3 + 27y^3 = (4x)^3 + (3y)^3 = (4x + 3y) \cdot ((4x)^2 - 4x \cdot 3y + (3y)^2) =$

$= (4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$.

98) <u>Разность кубов.</u> $a^3- b^3 = (a - b)(a^2+ab+b^2)$. *Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы.*

Пример. Разложить на множители: $8x^3 - 125y^3$.

Решение. $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3 = (2x - 5y) \cdot ((2x)^2 + 2x \cdot 5y + (5y)^2) =$

$= (2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$.

Все формулы сокращённого умножения (ФСУ) являются тождествами.

Преобразование целых выражений.

99) Целыми выражениями называют выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и возведения в степень. Целое выражение может содержать дробь, но в знаменателе этой дроби не должна находиться переменная величина. *Примеры* целых выражений:

$8a^3 - b^3$; $-\frac{2}{3}a^2b^3c$; $(2a - 1)^2 - (a + 2)(a - 2)$; $\frac{(3a+2)^3}{10}$.

100) Каждое целое выражение (с помощью тождественных преобразований) можно представить в виде многочлена. Для этого нужно: 1) раскрыть скобки (если они имеются), применяя правила умножения одночлена на многочлен или правило умножения многочлена на многочлен или ФСУ (формулы сокращенного умножения). 2) привести подобные слагаемые (если они имеются).

Пример. Представить в виде многочлена: $(2x + 3)^2 - x(3x + 8) + 2(x - 1)(x + 1)$.

Решение. Применим формулы квадрата суммы двух выражений и разности квадратов двух выражений, а также правило умножения одночлена на многочлен.

$(2x + 3)^2 - x(3x + 8) + 2(x - 1)(x + 1) = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 3x^2 - 8x + 2(x^2-1) =$

$= 4x^2 + 12x + 9 - 3x^2 - 8x + 2x^2 - 2 = 3x^2 + 4x + 7$.

101) При разложении многочлена на множители применяют один из способов (или их комбинацию):

– вынесение общего множителя за скобки;

– ФСУ (формулы сокращённого умножения);

– способ группировки.

Примеры. Разложить на множители: 1) $8a^3b - 50ab^3$. 2) $16x^5 - 9x^3 + 16x^2 + 24x + 9$.

Решение. 1) $8a^3b - 50ab^3$. Вынесем за скобки 2ab и применим формулу разности квадратов двух выражений.

$8a^3b - 50ab^3 = 2ab(4a^2 - 25b^2) = 2ab(2a - 5b)(2a + 5b)$.

2) $16x^5 - 9x^3 + 16x^2 + 24x + 9$. Сгруппируем слагаемые:

$16x^5 - 9x^3 + 16x^2 + 24x + 9 = (16x^5 - 9x^3) + (16x^2 + 24x + 9) =$
вынесем общий множитель x^3 из первых скобок и «свернём» квадрат двучлена во вторых скобках:

$= x^3(16x^2 - 9) + (4x + 3)^2 =$
разложим разность квадратов в первых скобках:

$= x^3(4x - 3)(4x + 3) + (4x + 3)^2 =$
вынесем общий множитель 4x+3 за скобки:

$= (4x + 3) \cdot (x^3(4x - 3) + (4x + 3)) =$
преобразуем выражение во вторых скобках и получим:

$= (4x + 3)(4x^4 - 3x^3 + 4x + 3).$

102) Примеры задач на преобразование целых выражений.

Задача 1. Доказать, что выражение $n^2 - 8n + 21$ при любом n принимает только положительные значения.

Доказательство. Выделим из данного трехчлена полный квадрат двучлена: считаем, что n^2 – это квадрат первого числа, 8n – удвоенное произведение первого числа на второе. Так как $8n = 2 \cdot n \cdot 4$, то второе число равно 4. Далее запишем квадрат второго числа 4^2. Этого числа не было, поэтому мы добавим и число -4^2, чтобы значение данного выражения не изменилось. Эти рассуждения записывают так:

$n^2 - 8n + 21 = n^2 - 2 \cdot n \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 21 = (n^2 - 2 \cdot n \cdot 4 + 4^2) - 16 + 21 =$

$(n - 4)^2 + 5$. Рассуждаем: так как $(n - 4)^2$ неотрицательно при любом n, то

$(n - 4)^2 + 5 > 0$ при любом n, а, следовательно и $n^2 - 8n + 21 > 0$ при любом n, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что при любом целом n значение выражения

$(5n - 4)^2 - (4n - 5)^2$ делится на 9.

Доказательство. Данное выражение представляет собой разность квадратов двух выражений: 5n - 4 и 4n - 5. Применим формулу **разности квадратов**, а затем упростим выражения в скобках:

$(5n - 4)^2 - (4n - 5)^2 = (5n - 4 - 4n + 5)(5n - 4 + 4n - 5) =$

$= (n + 1)(9n - 9) = 9(n + 1)(n - 1)$. Так как один из множителей полученного в результате тождественных преобразований произведения есть число 9, то и все произведение $9(n + 1)(n - 1)$ делится на 9, а следовательно, и данное выражение $(5n - 4)^2 - (4n - 5)^2$ делится на 9, что и требовалось доказать.

103) Треугольник Паскаля.

Применив формулы квадрата суммы, куба суммы и произведения многочленов запишем некоторые степени двучлена a+b.

$(a+b)^0 = 1$,

$(a+b)^1 = a+b$,

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$,

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

Коэффициенты всех строк можно расположить в виде треугольника:

n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1

В нём «боковые стороны» состоят из единиц, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, записанных над ним. Этот треугольник называют треугольником Паскаля. Сумма коэффициентов многочлена рана 2^n, где n показатель степени двучлена $(a+b)^n$.

Линейное уравнение с двумя переменными и его график.

104) Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида **ax + by = c**, где **x** и **y** - переменные, числа **a** и **b** - коэффициенты, число **c** - свободный член.

105) Пара значений переменных, при которых линейное уравнение с двумя переменными обращается в верное числовое равенство, называется решением этого уравнения. Решение уравнения записывают в круглых скобках. *Например, (2; -1) является решением уравнения 3x+2y = 4, так как 3 · 2+2 · (-1) = 4.*

106) Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются равносильными.

107) Если в уравнении с двумя переменными перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

108) Если обе части уравнения с двумя переменными умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

109) Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

110) Графиком линейного уравнения с двумя переменными ax + by = c, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является **прямая линия**.

Системы линейных уравнений с двумя переменными.

111) Система линейных уравнений с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Решением системы уравнений с двумя переменными называется **пара значений переменных,** обращающая в верное равенство каждое уравнение системы.

112) Решить систему уравнений - значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Для решений системы линейных уравнений с двумя переменными используют **графический способ, способ подстановки и способ сложения.**

113) Графический способ решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными заключается в **построении графика каждого уравнения**, входящего в данную систему, в одной координатной плоскости и нахождении **точки пересечения этих графико**в. **Координаты этой точки (x; y)** и будут являться **решением** данной системы уравнений.

114) Если прямые, являющиеся графиками уравнений системы, **пересекаются**, то система уравнений имеет **единственное решение.**

115) Если прямые, являющиеся графиками уравнений системы, **параллельны**, то система уравнений **не имеет решений**.

116) Если прямые, являющиеся графиками уравнений системы, **совпадают**, то система уравнений имеет **бесконечное множество решений.**

117) Способ подстановки для решения систем линейных уравнений с двумя переменными.

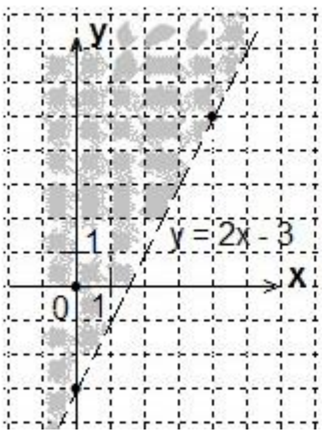
1. В одном из уравнений выражают одну переменную через другую, например, выразили **y** через **x.**
2. Подставляют полученное выражение вместо **y** во второе уравнение - получается уравнение с одной переменной **x.**
3. Из полученного уравнения находят значение этой переменной **x**.
4. Подставляют значение **x** в выражение, полученное в **1)** пункте и находят значение переменной **y**.
5. Пара **(x; y)** является решением данной системы уравнений.

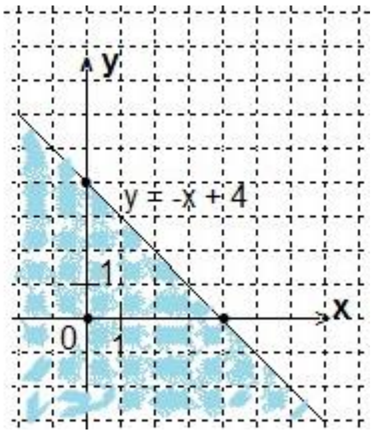
118) Способ сложения для решения систем линейных уравнений с двумя переменными.

1. Умножают левую и правую части одного или обоих уравнений на такое число, чтобы **коэффициенты** при одной из переменных в уравнениях оказались **противоположными числами.**
2. **Складывают почленно** полученные уравнения - остается уравнение с одной переменной, из которого находят значение этой переменной.
3. Подставляют найденное значение переменной в любое из данных уравнений и находят значение второй переменной.
4. Полученная пара значений переменных и служит решением данной системы уравнений.

Линейные неравенства с двумя переменными и их системы.

119) Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая его в верное числовое неравенство. В координатной плоскости все эти решения представляют собой множество точек, которые будут находиться в одной полуплоскости относительно прямой, соответствующей данному неравенству. *Примеры. Изобразите множество точек, которое задаёт на координатной плоскости неравенство: 1) y > 2x - 3; 2) y ≤ -x + 4.* <u>Решение</u>.





1) Строим график функции y = 2x - 3. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству *y > 2x - 3* будут лежать выше (левее) прямой.

2) Строим график функции y = -x + 4. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству *y ≤ -x + 4* будут лежать на прямой и слева (ниже) от неё.

120) Алгоритм решения системы неравенств с двумя переменными.

1. Изобразить в одной координатной плоскости множество решений каждого из неравенств.
2. Пересечение полуплоскостей - множеств решений данных неравенств и является решением данной системы.

.